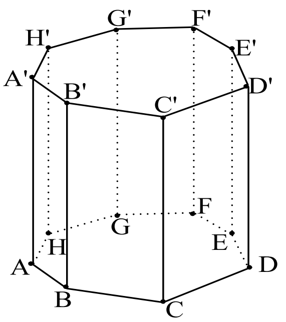
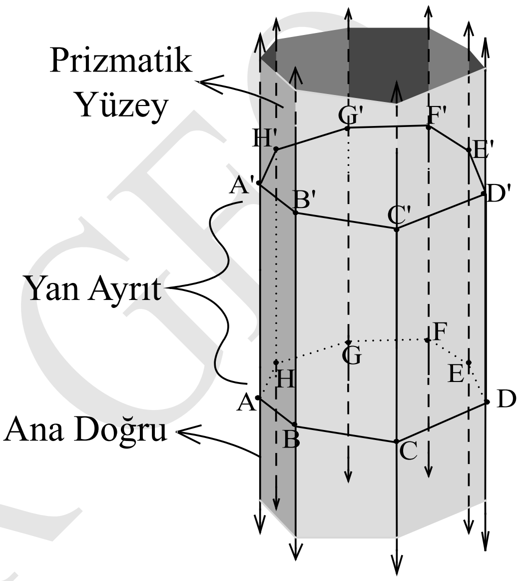
KATI CİSİMLER

Katı Cisimlerin İsimlendirilmesi ve Özelikleri

Aşağıdaki şekilde, ABCDEFGH tabanlı ABCDEFGHA’B’C’D’E’F’G’H’ sekizgen dik prizması verilmiştir.

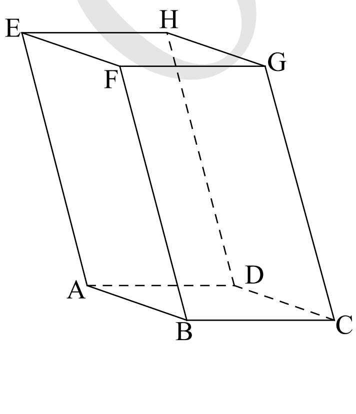
Prizmalar tabanlarındaki çokgene ve diklik-eğiklik durumuna göre isim alırlar. ABB’A’ , BCC’B’, … HAA’H’ dikdörtgenlerine *yanal yüzey (yan yüz)*, bu yan yüzleri taşıyan düzlemler sistemine ise *prizmatik yüzey* denir. Prizmatik yüzeyin ABCDEFGH ve A’B’C’D’E’F’G’H’ çokgenleriyle sınırlandırılmış bölümüne *ABCDEFGHA’B’C’D’E’F’G’H’* sekizgen dik prizması şeklinde isimlendirilen *KATI CİSİM* denir.





Her bir yan yüzün ara kesitine (kesişimine) *yan ayrıt* ([AA’] ve [BB’] vb. yan ayrıtlardır) ve bu doğru parçasını taşıyan doğruya *ana doğru* denir (AA’ ve BB’ vb. ana doğrulardır). Ana doğrular prizmatik yüzeylerin ayrıtıdır.

Dik prizmalarda üst tabanın *dik iz düşümü* alt tabandır. Eğik prizmalarda yan yüzlerden bir kısmı dikdörtgen olabilirken bir kısmı da paralelkenardır.

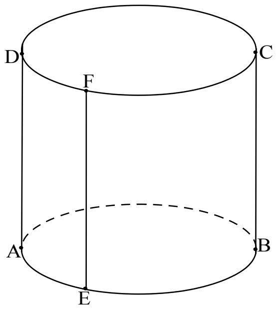


Yandaki şekilde ABCDEFGH kare eğik prizması verilmiştir. ABFE ve DCGH dörtgenleri paralelkenar iken BCGF ve ADHE dikdörtgendir.

Eğer taban kare yerine paralelkenar seçilseydi bu eğik prizma *Paralelyüz* (tüm yüzleri paralelkenar), eğer dik (yan yüzlerinin tamamı dikdörtgen) olsaydı *Dik Paralelyüz* adını alacaktı.

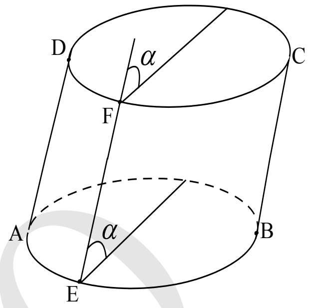
Bir prizmanın tabanı düzgün çokgen ise prizmaya da *düzgün prizma* denir.

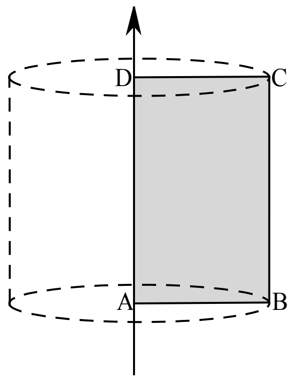
Tabanı Daire veya Eliptik Bölge seçilen prizmalara ise silindir denir. Silindirlerin prizmatik yüzeyine ise silindirik yüzey denir. Yan yüzleri kesintisiz bir eğri yüzey olduğundan yan ayrıttan söz edilemez bunun yerine iki taban arasındaki yüzey üzerinden çizilebilecek en kısa doğru parçasını taşıyan doğru önem kazanır: *Ana Doğru*



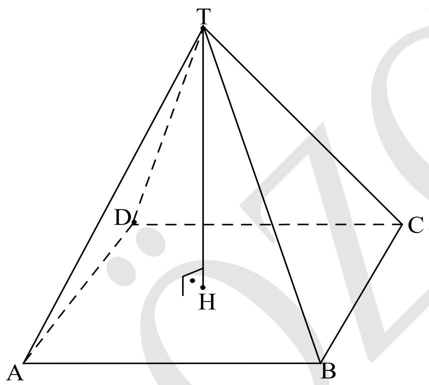
Yandaki şekilde [AD], [BC] ve [EF] ana doğrudur parçalarıdır.

Silindir dik ise bu ana doğru parçaları da tabanlara diktir, eğik ise aynı eğimle tabanları kesecektir.



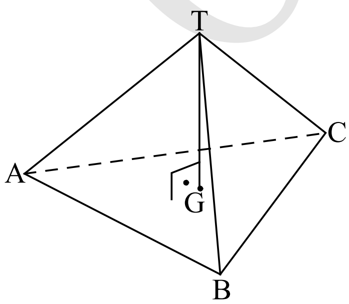


Bir dikdörtgeni bir kenarı etrafında tam açıyla döndürdüğümüzde oluşan cisim bir silindirdir ve bu silindire *Dönel Silindir* denir. Dönel silindirler dik silindirdir.

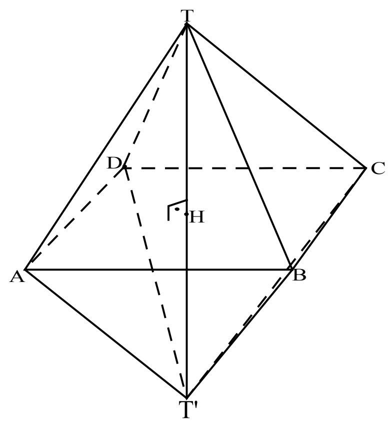


(T,ABCD) kare dik piramidi solda verilmiştir. Piramidin yüksekliği; [TH], ABCD karesinin ağırlık merkezine (karenin köşegenlerinin kesim noktası) inmektedir. Soldaki şekilde [TA] [TB], [TC] VE [TD] ana doğrulardır.

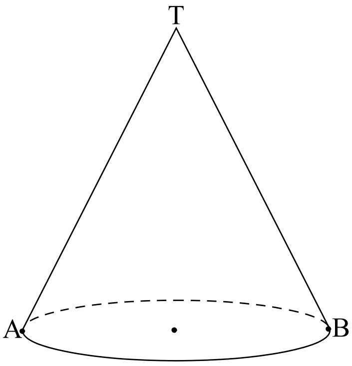
Piramitler de taban çokgeninin ismine göre isimlendirilirler. Üçgense üçgen piramit, yamuksa yamuk piramit ve eğer yüksekliği taban çokgeninin ağırlık merkezine düşüyorsa dik piramit değilse eğik piramit denir.



Tabanı eşkenar üçgen ve yan ayrıt uzunluğu taban ayrıtlarına eşit olan piramide ise *Düzgün Dörtyüzlü* (solda) denir. Düzgün Dörtyüzlü bir dik piramittir.
Tüm ayrıtları eşit olan iki kare piramidin taban tabana ters bir biçimde birleştirilmesiyle elde edilen cisme ise *Düzgün Sekizyüzlü* (sağda) denir.

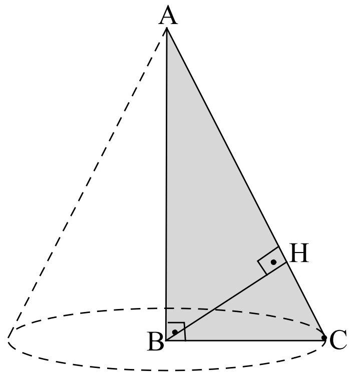


Buna göre *KÜP* de *düzgün altıyüzlü*dür. tür.

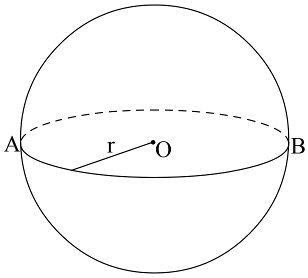


Tabanı daire seçilen piramide ise *Koni* denir. T, tepe noktasından inilen cisim yüksekliği eğer taban dairesinin merkezine (ağırlık merkezi) düşüyorsa dik koni düşmüyorsa eğik koni denir. Soldaki şekilde [TA] ve [TB] ana doğrulardır.

ABC dik üçgeninin AB etrafında tam döndürülmesiyle oluşan cisme *Dönel Koni* denir. Dönel koniler dik konidir.

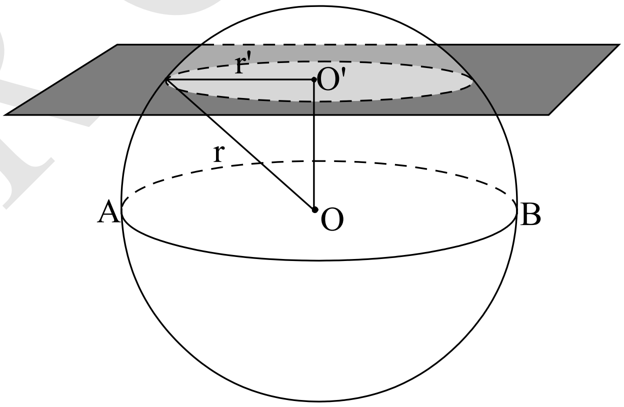


Eğer ABC üçgeni AC etrafında döndürülseydi [BH] yarıçaplı [AH] yükseklikli bir koni ile yine [BH] yarıçaplı [CH] yükseklikli iki dönel koniden oluşmuş bir cisim elde ederdik.



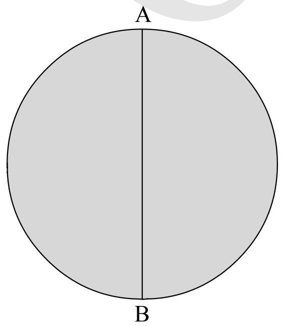
Uzayda (R^3) bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir küre yüzeyidir. Bu yüzeyle sınırlı cisim ise *Küre*dir. Söz konusu uzaklık kürenin yarıçapıdır.

Bir küre bir düzlemle kesildiğinde ara kesit bir dairedir. $\mathbf{r^2 = r'^2 + |OO'|^2}$ eşitliği geçerlidir. Küre yüzeyinin düzlem üzerinde kalan parçasına *Küre Kapağı*, $\mathbf{h = r - |OO'|}$'e ise küre kapağının yüksekliği denir. Küre kapağı ile düzlem arasında kalan cisme *Küre Parçası* denir.

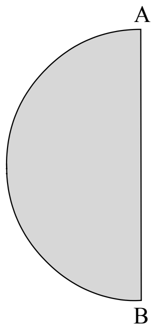


Bir kürenin paralel iki düzlemle kesilmesiyle arada kalan yüzeye *Küre Kuşağı*, bu kuşak ve düzlemlerle sınırlı cisme ise *Küre Tabakası* denir.

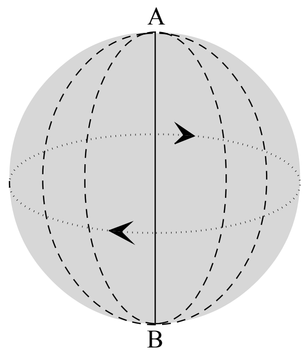
Aşağıdaki Şekil I [AB] etrafında 180^0, Şekil II ise [AB] etrafında 360^0 döndürüldüğünde Şekil III elde edilir. Burada [AB] çaptır.



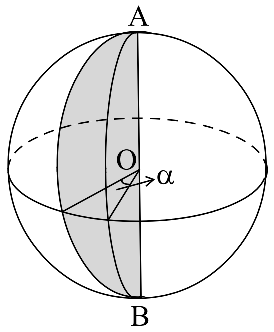
Şekil I



Şekil II



Şekil III

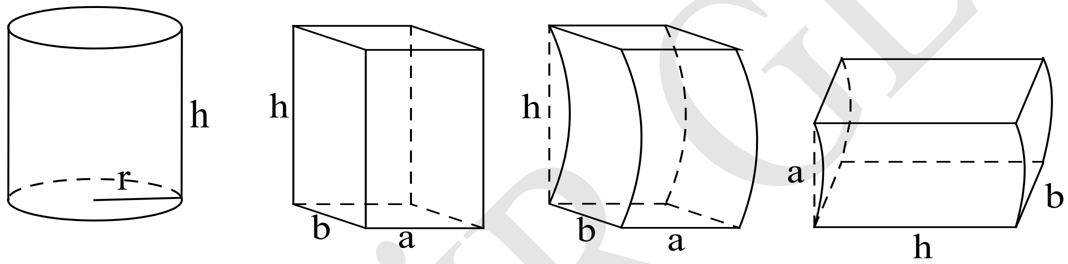


Ölçek açısı α olan iki düzlem O merkezli kürenin [AB] çapı üzerinde şekildeki gibi kesiştiğinde bu iki düzlem ve küre yüzeyiyle sınırlı cisme *Küre Dilimi* denir.

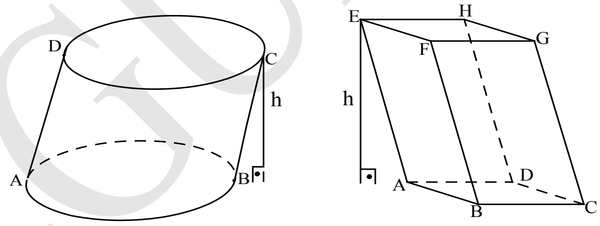
Küre diliminin [AB] etrafında tam açıyla döndürülmesiyle $360^o - \alpha$ kadar döndürülmesi arasında fark yoktur; iki durumda da aynı küre elde edilir.

Katı Cisimlerin Hacim ve Yüzey Alanlarının Hesaplanması

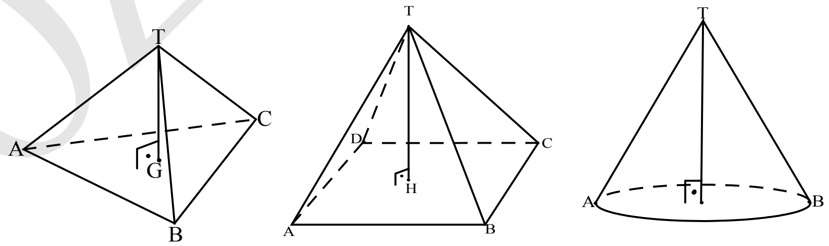
Prizmaların Hacimleri



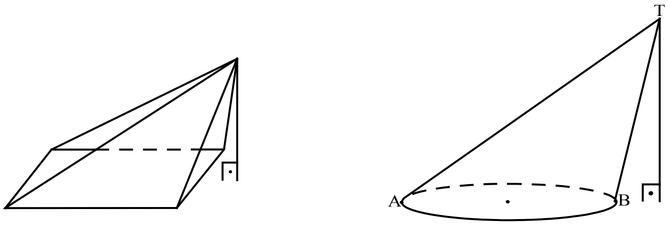
Tüm prizmaların ve silindirlerin hacimleri taban alanı ile yüksekliğin çarpımına eşittir.



Piramitlerin Hacimleri



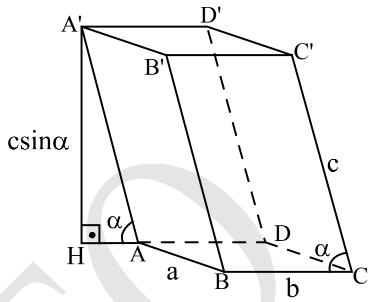
Tüm piramitlerin ve konilerin hacimleri taban alanı ile yüksekliğin çarpımının üçte biridir.



Hacim ve Alan Formülleri

Farklı ayrıtları *a,b* ve *c* olan **dikdörtgenler prizmasının** hacmi **V = a.b.c** tüm yüzey alanı ise **S = 2 (ab+ac+bc)**
Bir küpün (tüm ayrıtları eşit olan dikdörtgenler prizması) hacmi $\mathbf{V = a^3}$ alanı ise $\mathbf{S = 6a^2}$

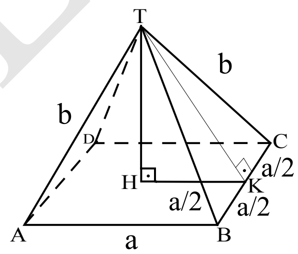
Bir **dikdörtgen eğik prizma**nın farklı ayrıtları *a,b* ve *c* ise hacmi **V = a.b.c.sinα** (burada *ab* ayrıtlı dikdörtgen taban ise *c.sinα* da cismin yüksekliğidir) ve alanı **S= 2(ab+ac+bc.sinα)**



Taban ayrıtları *a*, ana doğruları *b* olan **kare dik piramidin** hacmi

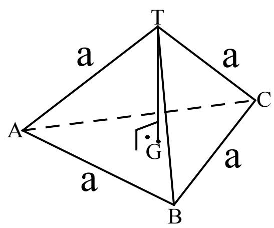
$$\mathbf{V} = \frac{a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{3}$$

Burada $|TK| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ olduğundan $|TH| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2}{2}\right)}$ bulunur.



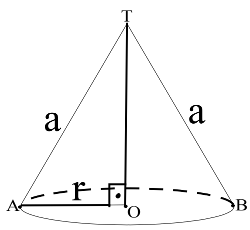
Yanal yüzeyin alanı **S = 4(a|TK|/2)= 2a|TK|**

Düzgün dörtyüzlünün bir ayrıtı *a* ise hacmi $\mathbf{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ alanı ise dört tane eşkenar üçgenden oluştuğundan $\mathbf{S} = a^2\sqrt{3}$ bulunur.

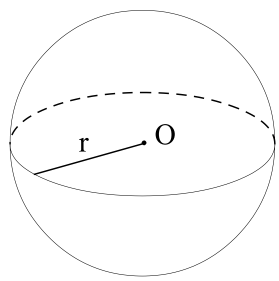


Taban yarıçapı *r*, bir ana doğrusu *a* olan bir **koni**nin hacmi

$\mathbf{V} = \frac{\pi r^2\sqrt{a^2 - r^2}}{3}$ dir. Burada yüksekliğin karesi; $|TO|^2 = a^2 - r^2$ dir.

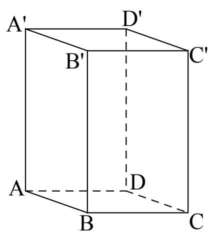


Yarıçapı *r* olan **küre**nin hacmi $\mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$ yüzey alanı ise $\mathbf{S = 4\pi r^2}$ dir.



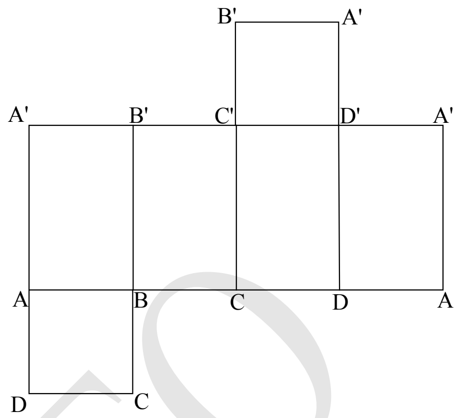
Katı Cisimlerin AÇINIMLARI

Dik Prizmalar



Soldaki ABCDA’B’C’D’ dikdörtgenler prizmasının açınımı sağdadır.

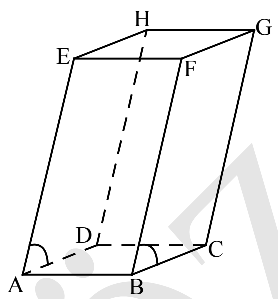
Kapakların [AB] ve [C’D’] üzerine konması zorunlu değildir. Ancak biri mutlaka A*A* doğrusu üzerinde diğeriyse mutlaka A’*A*’ doğrusu üzerinde olmalıdır.



Tabanı dörtgen olan tüm prizmaların açınımı yukarıdaki şekildedir. Taban paralelkenar, yamuk veya herhangi bir dörtgen olduğunda ABCD ve A’B’C’D’ kapakları da değişir ancak A*A*A’*A*’ dörtgeni yine bir dikdörtgendir.

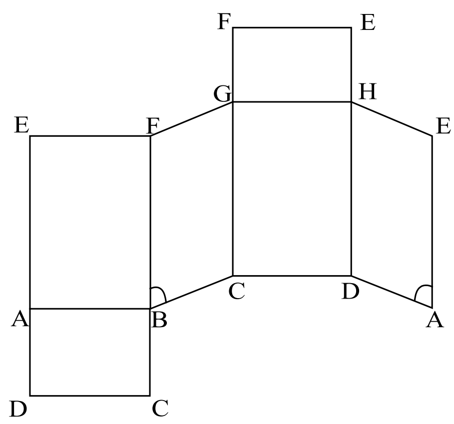
Tabanın üçgen veya herhangi bir çokgen olması durumunda tabanın kenar sayısı kadar dikdörtgen yanyana dizilecektir.

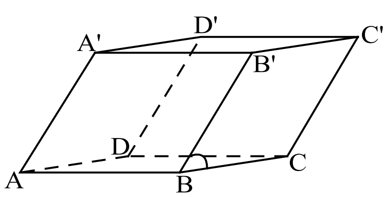
Eğik Prizmalar



Soldaki ABCDEFGH eğik dikdörtgen prizmanın açınımı sağdadır.

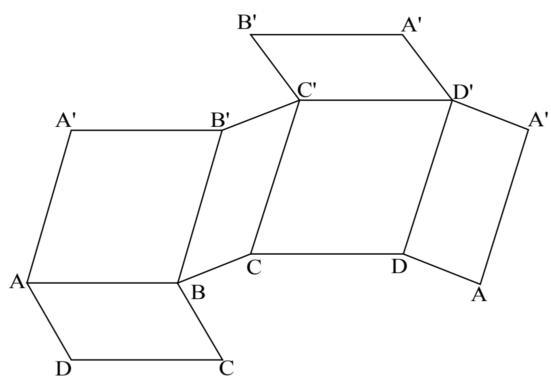
Tabanı dörtgenden farklı olduğunda (üçgen, beşgen vb.) tabanın kenar sayısı kadar dikdörtgen ve paralelkenar yanyana dizilecektir.



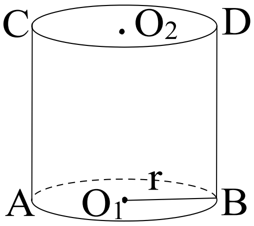


Tabanları ve yan yüzleri paralelkenar olan prizmaya Paralelyüz demiştik.

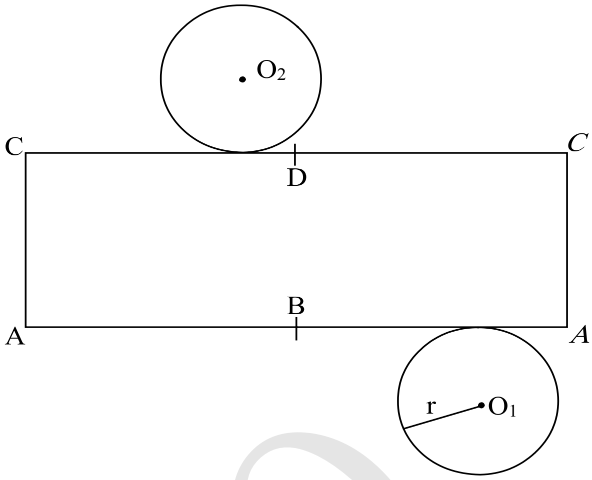
Paralelyüzün açınımı bir eğik prizmadan farksızdır.



Silindirler



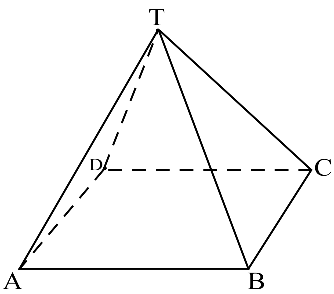
Dik silindirin Açınımında iki eş daire ve bir kenarı bu dairenin çevresi kadar diğer kenarı cismin yüksekliği kadar olan bir dikdörtgen bulunur.



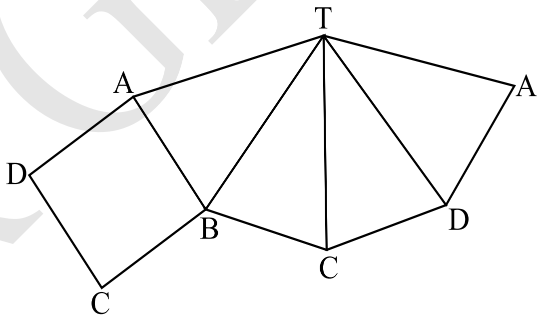
$$|\mathbf{A}\mathit{A}| = 2\pi r = |\mathbf{C}\mathit{C}| = 2|\mathbf{AB}| = 2|\mathbf{CD}|$$

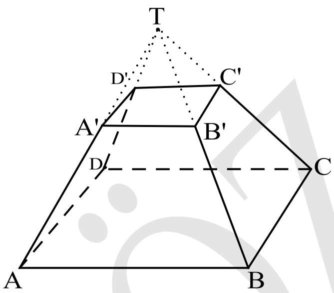
Böylece silindirin yanal alanı **S = 2πr.h** bulunur. Burada h cisim yüksekliği, dik silindirde $|AC|$ kadarken eğik silindirde $|AC|$.sinα kadardır.

Piramitler

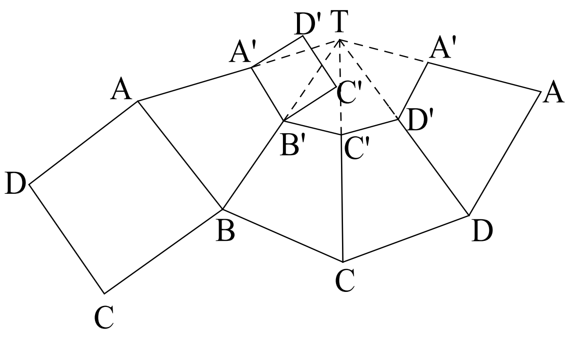


Soldaki piramidin açınımı sağdadır.

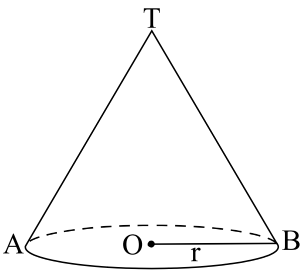




Kesik piramitte prizmalardaki gibi alt ve üst kapak söz konusudur.



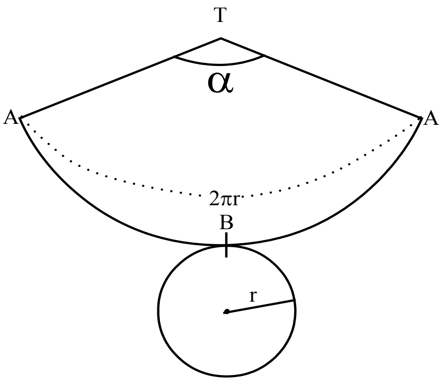
Koniler



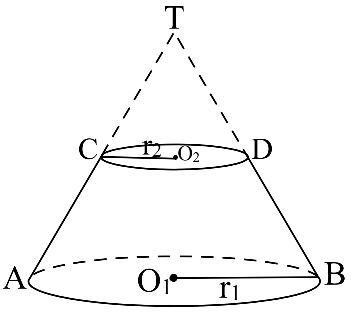
Konilerin yan yüzleri birer daire dilimidir. Daire dilimini sınırlayan yayın uzunluğu ise taban çevresidir.

[TA] ve [TB] bu dilimin yarıçapıdır, dolayısıyla $|\mathbf{AA}| = 2\pi|\mathbf{TA}|\dfrac{\alpha}{\mathbf{360°}} = \mathbf{2\pi r}$

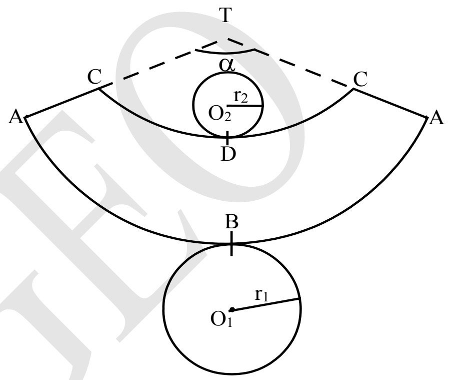
olur ki buradan $\mathbf{r} = \mathbf{R}\dfrac{\alpha}{\mathbf{360°}}$ elde edilir.



Yanal alana üçgen gibi davranarak alanı bulunabilir (Daire dilimine üçgen gibi davranarak alanı bulunabilir). $|ABA| = 2\pi R(\alpha/360^o)$ üçgenin tabanı, [TB] ($|\mathbf{TA}| = |\mathbf{TB}| = \mathbf{R}$) de bu üçgenin yüksekliği olarak alındığında üçgenin alan formülünden (ATA)= $\pi R^2(\alpha/360^o)$ bulunur ki zaten bu bulduğumuz daire diliminin alanıdır; ancak $|ABA| = 2\pi r$ dir de. Dolayısıyla üçgenin alan formülünü uygularsak **(ATA)= πrR** bulunacaktır. Bu formülde *r* nin *R* türünden eşitini koyarsak ilk formülü elde ederiz: (ATA)= $\pi R^2(\alpha/360^o)$.



Kesik koni de kesik piramit gibi birbirine paralel iki kapak söz konusudur. Bu kapakları taban kabul eden iki koninin hacimleri farkı kesik koninin hacmidir.
Burada $|AA| = 2\pi r_1$ ve $|CC| = 2\pi r_2$ şeklindedir.



Kesik koninin yanal yüzeyi birden fazla yöntemle bulunabilir. Bunlardan ilki, iki koninin yanal yüzey alanları farkını almaktır.

Kesik koninin yanal yüzeyi halka dilimidir;

$\mathbf{S} = \pi\left(\mathbf{R}_1^{\,2} - \mathbf{R}_2^{\,2}\right)\dfrac{\alpha}{360°}$ ya da halka dilimine yamuk gibi davranarak alanı hesaplanabilir;

$\mathbf{S} = \dfrac{(2\pi\mathbf{r}_1 + 2\pi\mathbf{r}_2)(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{2} = \pi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$ burada $|AT| = R_1$ ve $|CT| = R_2$ dir.

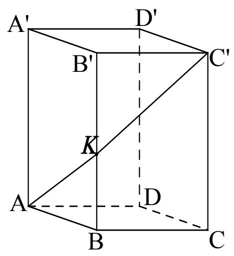
$r_i = R_i\dfrac{\alpha}{360°}$ $, i = 1,2$ eşitliğinden r_i yukarıdaki formülde yerine konarsa bir evvelki (halka dilimi formülü) formül elde edilir.

Basitçe; yanal alan hesabında geçerli olan *"taban çevresi x yanal yükseklik"* formülü koni ve kesik konide de geçerlidir.

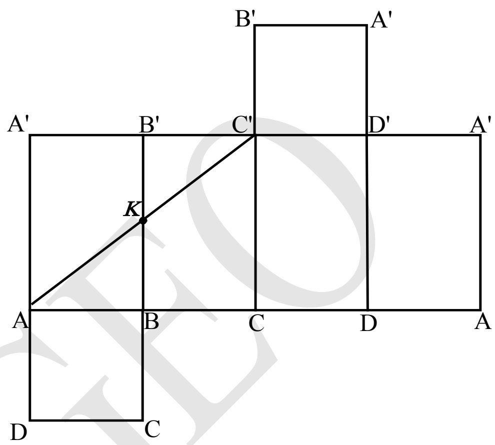
Yüzeydeki Hareketli………

Yüzey boyunca hareket eden bir hareketli (karınca, örümcek, haşarat vb.) en kısa yolu alırken tıpkı bizim dünyanın eğimine-eğriliğine bakmaksızın dosdoğru gitmemiz gibi bir doğru üzerinde hareket eder, bir eğri ya da birkaç doğru parçasından oluşan bir sistemde değil.

Prizmalar:

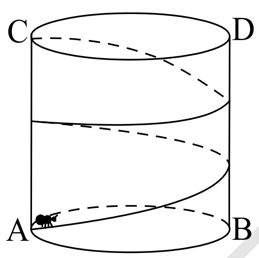


Soldaki şekilde A dan C' ne prizmanın yüzeyi üzerinden en kısa yoldan giden bir hareketlinin [BB'] üzerindeki ***K*** noktasına uğrayarak $|\mathbf{AK}|+|\mathbf{KC'}|$ kadar yol aldığı görülüyor.

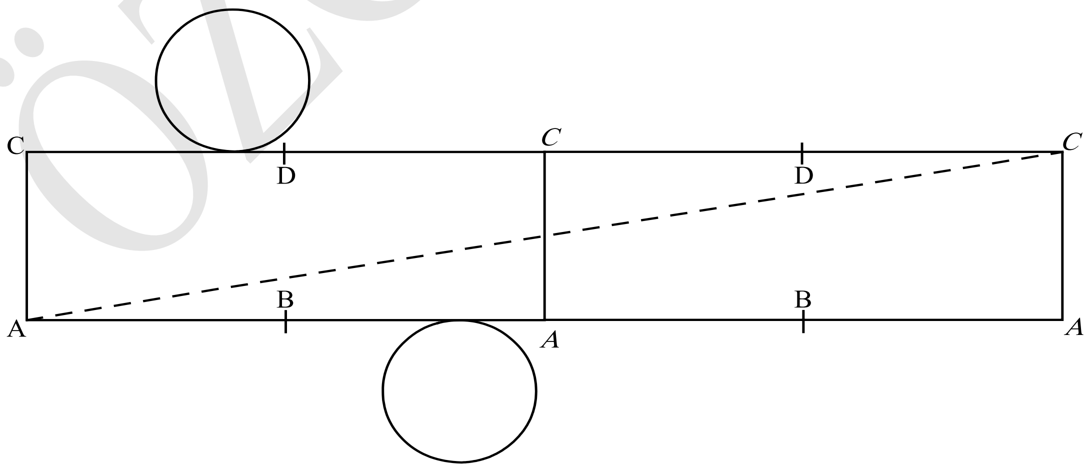


Sağdaki *açınım*ında ise aslında bu yolun doğrusal ve $|\mathbf{AC'}|=\sqrt{|\mathbf{AC}|^2+|\mathbf{CC'}|^2}$ şeklinde hesaplanabileceği görülüyor.

Silindirler:

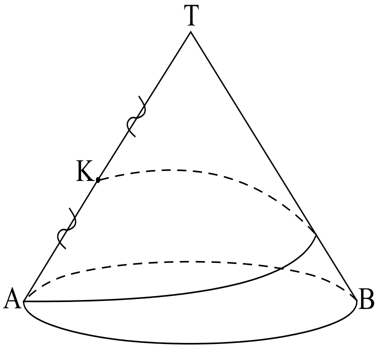


Soldaki şekilde A noktasındaki *karınca!* silindirin yüzeyi üzerinde iki tur atarak C noktasına varıyor.
Karıncanın maceralı bir seyahat yaptığını sanarsak yanılırız. Aşağıda karıncanın izlediği yol haritasının bir dikdörtgenin (A*AC*C dikdörtgeni) köşegeni olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla bu yol da pisagor bağıntısı yardımıyla hesaplanabilir.



Bir hareketli bir cismin yüzeyi üzerinde birden fazla tur attığında, tur atılan yüzeyi, tur sayısı kadar peşpeşe çizmeliyiz. Bu sebeple yukarıda silindirin yanal yüzeyi iki kez çizilmiştir.

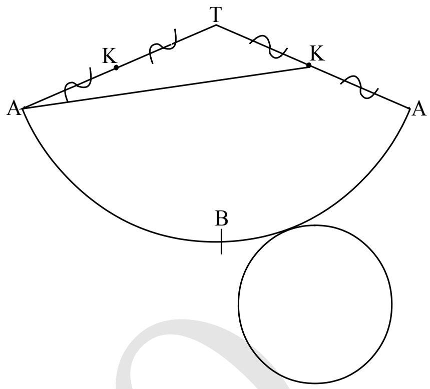
Koniler:



Konilerin açınımının bir daire dilimi ve bir daireden ibaret olduğundan söz etmiştik.

Soldaki şekilde A noktasından başlayıp tam turla K noktasına ulaşan bir hareketlinin çizdiği yol sağdadır.

Bu yolun hesabını cebirsel olarak şu şekilde yapabiliriz.

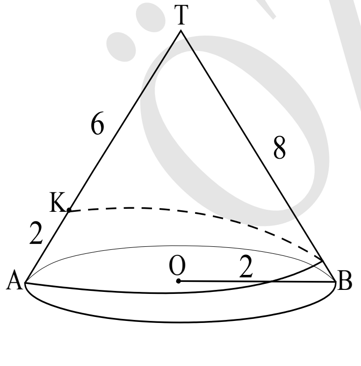


Daire diliminin yarıçapı *R*, taban dairesinin yarıçapı *r* ve ATK (daire diliminin açısı) açısı α olsun.

$\alpha = \dfrac{r}{R}360°$, $|TA| = 2|TK| = R$ olduğundan, $|AK|$, cosinüs teoreminden aşağıdaki gibi hesaplanır (*tabii ki kosinüs teoreminden değil, dik üçgenden hesaplamak daha doğru olacaktır. Burada α-açısının belirsizliği üzerine işlem yapılmıştır.Aşağıdaki örnekte 6-8-10 üçgeniyle bu yolun basitce bulunduğu görülür*).

$$|AK|^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2R\frac{R}{2}\cos\alpha = \frac{5R^2}{4} - R^2\cos\alpha$$

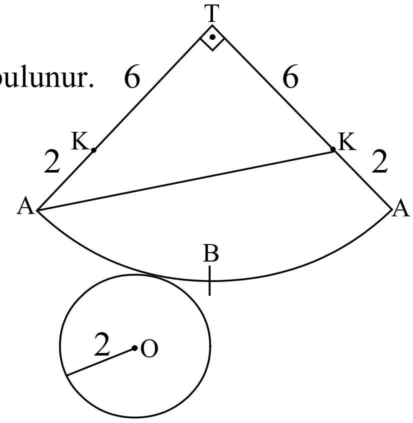
Örneğin, $|TA| = 8\,\text{cm}$, $|OB| = 2\,\text{cm}$ ve $|TK| = 3|AK|$ olmak üzere A noktasından koni yüzeyince hareket edip K noktasına varan bir hareketlinin alacağı en kısa yolu hesap edelim.



Önce açınımı çizdiğimizde bulacağımız daire diliminin kaç derecelik bir dilim olduğunu bulmalıyız.

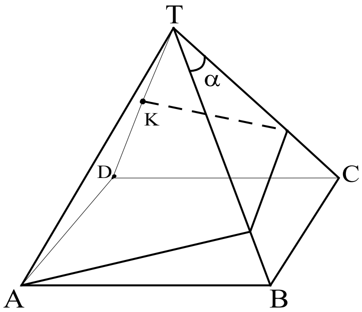
Taban dairesinin çevresi $2\pi2=4\pi$ cm aynı zamanda daire diliminin yayına, $2\pi8(\alpha/360^o)$, eşittir.

$4\pi = 2\pi8(\alpha/360^o)$ olduğundan $\alpha = 90^o$ bulunur.



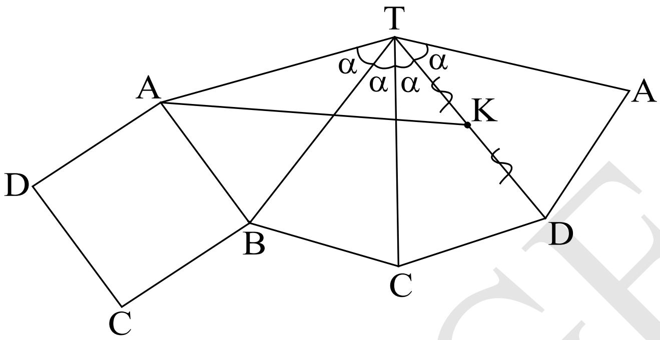
Böylece sağdaki şekli elde ederiz. Buradan $|AK|$ nın 10 cm olduğu kolayca görülür.

Piramitler:

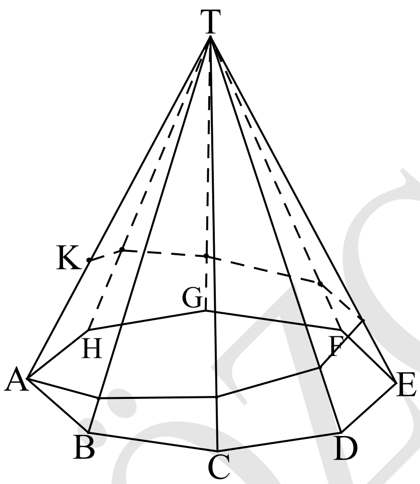


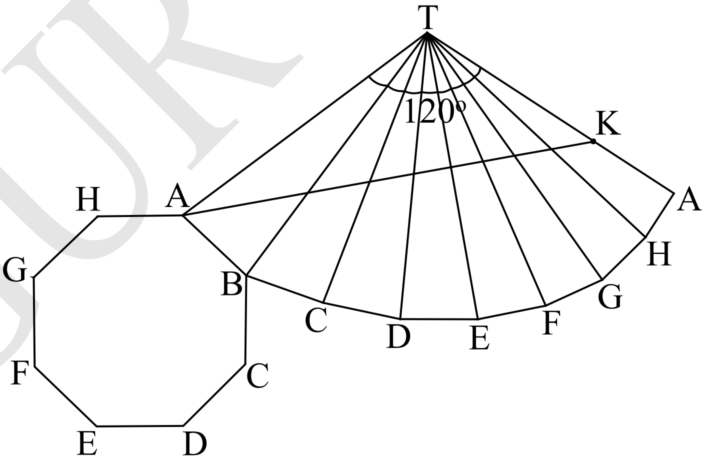
Solda A noktasından [TD] nin orta noktası K ya düzgün kare piramidin yanal yüzeyi üzerinden giden bir hareketlinin en kısa yolu çizilmiştir.

Bu piramidin açınımı aşağıdaki gibidir. Burada $\alpha = 30^o$ ve $|AT| = 6\,\text{cm}$ seçersek $|AK| = 3\sqrt{5}\,\text{cm}$ olacaktır.



Düzgün sekizgen dik piramitte $|AT| = 6\,\text{cm}$, $|TK| = 2|AK|$ $m(A\hat{T}B) = 15°$ olduğunda aşağıdaki gibi bir hareketli en kısa yoldan A noktasından K noktasına ulaşsın. Bu yolu hesaplayalım:





Cismin açınımını yaptığımızda ATK üçgeninin $|AK|$ kenarını hesaplayabiliriz.

Bu hesabı yaparken Cosinüs Teoremi kullanabileceğimiz gibi dik üçgenden de yararlanabiliriz.